SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1995-96

Angelo Favini

EQUAZIONI PARABOLICHE DEGENERI E SEMIGRUPPI INFINITAMENTE DIFFERENZIABILI

22 febbraio 1996

Tecnoprint - Bologna 1996

Riassunto. Si dimostra che l'operatore differenziale degenere del secondo ordine $Au := \alpha(x)u''$, dove $\alpha \in C[0,1]$, $\alpha(0) = 0 = \alpha(1)$, $\alpha(x) > 0$ su $(0,1)$, di rilevante interesse in teoria dell'approssimazione e in teoria della probabilità, con opportune scelte del suo dominio, genera un semigruppo analitico in uno spazio L^2 con peso e un semigruppo infinitamente differenziabile nello spazio $C[0,1]$.

Abstract. We show that the degenerate differential operator of the second order on the unit interval $Au := \alpha(x)u''$, where $\alpha \in C[0,1]$, $\alpha(0) = 0 = \alpha(1)$, $\alpha(x) > 0$ on $(0,1)$, that is of relevant interest both in approximation theory and in probability theory, with a suitable choice of its domain, does generate an analytic semigroup in a space L^2 with weight and an infinitely differentiable semigroup in the space $C[0,1]$.

Introduzione

Nel lavoro [2] di Barbu e Favini, descritto in uno dei Seminari dello scorso anno, mediante espressione del risolvente $(AB+z)^{-1}$ nella forma $B^{-1}(A+zB^{-1})^{-1}$, si è mostrato che interessanti equazioni di tipo parabolico degenere possono essere trattate come casi speciali di equazioni multivoche. Vedi Favini e Yagi [6],[7].

In questo seminario si proverà direttamente che certi operatori differenziali degeneri del secondo ordine, con opportune condizioni ai limiti, generano o semigruppi analitici o semigruppi infinitamente differenziabili in convenienti spazi di funzioni.

Una parola sulle condizioni ai limiti a cui ho accennato. Esse sono dettate da applicazioni concrete, soprattutto a teoria della approssimazione e a teoria della probabilità che hanno, d'altra parte, motivato il presente studio. Come testo di riferimento, si veda la recente monografia [1] di Altomare e Campiti.

In tale lavoro viene posto l'accento sull'operatore differenziale, con condizioni ai limiti di tipo Wentzell, definito da

$$D(W):=\{u\in C[0,1]\cap C^2(0,1)\ ;\ \alpha(x)u''(x)\to 0 \text{ per } x\to 0+ \text{ e per } x\to 1-\},$$
$$(Wu)(x):=\alpha(x)u''(x),\ u\in D(W),$$

dove $\alpha(x)=x(1-x)$. Vedi Wentzell [9].

In un famoso lavoro [5], Clément e Timmermans hanno provato che W genera un semigruppo contrattivo in C[0,1].

Un problema aperto è l'analiticità di tale semigruppo.

Ricordo che, più recentemente, Gaetano Fichera in [8] ha espresso la soluzione del problema

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad t>0,\ 0<x<1, \tag{1}$$

$$u(0,x)=f(x),\quad 0<x<1, \tag{2}$$

$$\alpha(x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\to 0 \quad \text{per } x\to 0+,\ x\to 1- \tag{3}$$

mediante la successione di autofunzioni per il problema ellittico

$$zu(x)-\alpha(x)u''(x)=0,\quad 0<x<1,$$
$$u(0)=0=u(1).$$

Infatti, Fichera osserva che se $v=v(t,x)$ risolve il problema di Cauchy-Dirichlet

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad t > 0,\ 0<x<1,$$

$$v(0,x)=f(x)-(1-x)f(0)-xf(1), \quad 0<x<1,$$

$$v(t,0)= 0 = v(t,1),$$

con f sufficientemente regolare, allora

$$u(t,x)=v(t,x)+(1-x)f(0)+xf(1)$$

risolve (1)-(3).

Il nostro metodo è vicino a quello di Fichera. Prima noi mostriamo che un operatore differenziale ellittico degenere con condizioni Dirichlet genera un semigruppo <u>analitico</u> in uno spazio L^2 con peso.

Proviamo poi che se $\alpha(x)$ soddisfa la condizione di integrabilità

$$\int_{(0,1)} \alpha(x)^{-s}dx < \infty \tag{4}$$

per un $s > 1$, allora l'operatore B definito da

$$D(B):= \{u\in C^1[0,1]\cap C^2(0,1)\ ;\ u(0)= 0 = u(1),\ \alpha(x)u''(x)\to 0 \text{ per } x\to 0+ \text{ e per } x\to 1-\},$$

$$(Bu)(x):= \alpha(x)u''(x),\ u\in D(B),$$

genera un semigruppo infinitamente differenziabile (vedi Favini e Yagi [6],[7]).

Si mostra, infine, che l'operatore W, con α soddisfacente la condizione di integrabilità (4), genera anch'esso un semigruppo infinitamente differenziabile in $C([0,1])$.

Il risultato si applica a funzioni $\alpha(x)$ come $x^m(1-x)^m$, $0<m<1$.

1. Equazioni paraboliche degeneri in R^n.

In questo paragrafo esporrò alcuni risultati ottenuti in collaborazione con V.Barbu e S.Romanelli, [3].

Se Ω è un insieme aperto connesso limitato di R^n, $n \geq 1$, con frontiera regolare $\partial\Omega$, supporremo che

(1.1) $\alpha \in C(\bar{\Omega})$, $\alpha(x)>0$ per ogni $x \in \Omega$, $\alpha(x)=0$ per ogni $x \in \partial\Omega$.

Introduciamo lo spazio L^2 con peso

$$L^2_{1/\alpha}(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega) \; ; \; \alpha^{-1/2} u \in L^2(\Omega) \}$$

$$\|u\|^2_\alpha := \int_\Omega \alpha(x)^{-1} \, |u(x)|^2 \, dx,$$

cosicchè $L^2_{1/\alpha}(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert con prodotto interno

$$\langle u,v \rangle_\alpha = \int_\Omega \alpha(x)^{-1} u(x) \bar{v}(x) dx, \qquad u,v \in L^2_{1/\alpha}(\Omega).$$

Denotiamo con $H^1_\alpha(\Omega)$ il completamento di $C^\infty_0(\Omega)$ rispetto alla norma

$$\|u\|_{1,\alpha} := (\|u\|^2_\alpha + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)})^{1/2}.$$

$H^2_\alpha(\Omega)$ è invece il completamento di $C^\infty_0(\Omega)$ rispetto alla norma

$$\|u\|_{2,\alpha} := (\|u\|^2_{1,\alpha} + \| \alpha^{1/2} \Delta u \|^2_{L^2(\Omega)})^{1/2}.$$

Si ha :

Teorema 1.1 *Se* α *soddisfa* (1.1), *allora l'operatore definito da*

$$Au := \alpha \Delta u, \quad u \in D(A) := H^2_\alpha(\Omega),$$

è m-*dissipativo ed autoaggiunto in* $L^2_{1/\alpha}(\Omega)$.

Dimostrazione. Cominciamo con lo stabilire la formula di Green

(1.2) $$\int_\Omega \Delta u \bar{\phi} \, dx = - \int_\Omega \nabla u \, \nabla \bar{\phi} \, dx$$

per ogni $u \in D(A)$ e per ogni $\phi \in H^1_\alpha(\Omega)$.

Infatti, se approssimiamo ϕ con una successione $\{\phi_k\}$ in $C^\infty_0(\Omega)$ nella norma $\|\cdot\|_{1,\alpha}$ e notiamo che

$$\int_\Omega \Delta u \bar{\phi} \, dx = \lim_{m \to \infty} \int_\Omega \alpha^{1/2} \Delta u \, \alpha^{-1/2} \, \bar{\phi}_m \, dx$$

$$= - \lim_{m\to\infty} \int_\Omega \nabla u \, \nabla \bar{\phi}_m \, dx$$

$$= - \int_\Omega \nabla u \, \nabla \bar{\phi} \, dx,$$

si ottiene quanto affermato.

La (1.2) implica immediatamente che A è dissipativo in $L^2_{1/\alpha}(\Omega)$, perchè

$$\langle Au,u\rangle_\alpha = \int_\Omega \Delta u \, \bar{u} \, dx = - \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx, \quad \forall u \in D(A).$$

Per provare che Imm(I-A), l'immagine di I-A, coincide con $L^2_{1/\alpha}(\Omega)$, notiamo prima di tutto che I-A è continuo da $H^1_\alpha(\Omega)$ al suo duale $(H^1_\alpha(\Omega))^*$ e che è anche coercivo. Più precisamente, lo è una sua estensione continua.

Infatti, per la (1.2), per ogni $u,v \in H^1_\alpha(\Omega)$, si ha

$$\langle Au,v\rangle_\alpha \le \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \le \|u\|_{1,\alpha} \|v\|_{1,\alpha}$$

e

$$\langle (I-A)u,u\rangle_\alpha = \|u\|^2_{L^2_{1/\alpha}} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{1,\alpha}.$$

Si applica allora il Lemma di Lax-Milgram e si conclude così che

$$\mathrm{Imm}(I-A) = (H^1_\alpha(\Omega))^* \supseteq L^2_{1/\alpha}(\Omega).$$

Poichè A è simmetrico e m-dissipativo, esso è autoaggiunto in $L^2_{1/\alpha}(\Omega)$; segue che A è il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico in $L^2_{1/\alpha}(\Omega)$.#

Il successivo risultato dà una caratterizzazione del dominio di A nel caso in cui $\alpha(x)$ è debolmente singolare, nel senso che

$$\int_\Omega \alpha(x)^{-q} \, dx < +\infty \tag{1.3}$$

per un q>0 opportuno. Precisamente, vale il

Teorema 1.2 *Sotto le assunzioni* (1.1), (1.3), *se*

$$q = \begin{cases} n/2, & \textit{se } n > 2, \\ \textit{arbitrario in } (1,\infty), & \textit{se } n = 2, \\ 1, & \textit{se } n = 1, \end{cases}$$

allora

$$\begin{aligned} D(A) &= \{ u \in H^1_\alpha(\Omega) \, ; \, \alpha^{1/2}\Delta u \in L^2(\Omega) \} \\ &\subseteq \{ u \in H^1_\alpha(\Omega) \, ; \, \Delta u \in L^1(\Omega) \} \\ &\subseteq W^{1,p^*}_0(\Omega), \end{aligned}$$

dove $1<p^*<\frac{n}{n-1}$.

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che

$$\int_\Omega |u(x)|^2\,\alpha(x)^{-1}\,dx \le \Big(\int_\Omega |u(x)|^p\,dx\Big)^{2/p}\ \Big(\int_\Omega \alpha(x)^{-q}\,dx\Big)^{1/q},\ u\in L^p(\Omega),$$

per ogni $p\in(2,+\infty)$, $q=\frac{p}{p-2}$.

Poichè al variare di p in $(2,+\infty)$, q descrive tutto l'intervallo $(1,+\infty)$ e $p=\frac{2q}{q-1}$, $q\in(1,+\infty)$, deduciamo che per ogni $u\in L^{2q/(q-1)}(\Omega)$, $q>1$, risulta

$$\int_\Omega |u(x)|^2\,\alpha(x)^{-1}\,dx \le \Big(\int_\Omega |u(x)|^{2q/(q-1)}\,dx\Big)^{(q-1)/q}\ \Big(\int_\Omega \alpha(x)^{-q}\,dx\Big)^{1/q}.$$

Poichè Ω è un dominio di R^n con la proprietà del cono, il Teorema di immersione di Sobolev afferma in particolare che

i) $H^1(\Omega)=W^{1,2}(\Omega)\subset L^p(\Omega)$, $2\le p\le\frac{2n}{n-2}$, $n>2$,

ii) $H^1(\Omega)=W^{1,2}(\Omega)\subset L^p(\Omega)$, $2<p<+\infty$, $n=2$,

iii) $H^1(\Omega)=W^{1,2}(\Omega)\subset C(\bar\Omega)$, se $n=1$.

Nel caso i), $n>2$, allora

$$H^1(\Omega)\subset L^{2q/(q-1)}(\Omega)$$

se

$$2\le\frac{2q}{q-1}\le\frac{2n}{n-2},$$

e ciò è vero se e solo se $q\ge n/2$.

Nel caso ii), $n=2$, allora

$$H^1(\Omega)\subset L^{2q/(q-1)}(\Omega)$$

se

$$\frac{2q}{q-1}>2,$$

cioè se q è arbitrario in $(1,+\infty)$.

Finalmente, se $n=1$, ogni $u\in H^1_0(\Omega)$ è continua in $\bar\Omega$ e così

$$\int_\Omega |u(x)|^2\,\alpha(x)^{-1}\,dx \le \Big(\sup_{\bar\Omega}|u(x)|\Big)^2\int_\Omega \alpha(x)^{-1}\,dx<+\infty.$$

Poichè

$$D(A)=\{\,u\in H^1_\alpha(\Omega)\,;\ \alpha^{1/2}\Delta u\in L^2(\Omega)\,\},$$

$$\|\Delta u\|_{L^1(\Omega)}\le\|\alpha^{1/2}\Delta u\|_{L^2(\Omega)}\,\|\alpha^{-1}\|_{L^1(\Omega)},\ u\in D(A).$$

In base ad un noto risultato di Brezis e Strauss [4], ciò implica che $D(A)\subseteq W^{1,p^*}_0(\Omega)$, con $p^*<\frac{n}{n-1}$.#

2. Generazione in spazi di funzioni continue.

In questo paragrafo applicheremo il Teorema 1.2 nel caso particolare della dimensione $n=1$, per ottenere un risultato di generazione nello spazio $C_0([0,1])$ delle funzioni continue su $[0,1]$ e nulle agli estremi.
Ciò ci servirà per dimostrare un analogo risultato in $C([0,1])$ per l'operatore differenziale $\alpha u''$ con condizioni ai limiti di tipo Wentzell.
In effetti, noi assumeremo qualcosa di più su α rispetto al Teorema 1.2, precisamente che α soddisfa (1.1) e (4).
Posto $p:=2s(1+s)^{-1}$, p appartiene a $(1,2)$ e la condizione (4) può essere scritta in modo equivalente

$$\int_{(0,1)} \alpha(x)^{-p/(2-p)}\, dx < \infty \tag{2.1}$$

per un $p\in(1,2)$.
Sia B l'operatore $Bu:=\alpha u''$, dove

$u\in D(B)$ se e solo se $u\in C^1([0,1])\cap C^2(0,1)$, $u(0)=0=u(1)$ e

$\alpha(x)u''(x)\to 0$ per $x\to 0+$ e $x\to 1-$.

La (4), cioè la (2.1), assicura la sommabilità di $\alpha(x)^{-1}$ su $(0,1)$ e quindi $D(B)\subseteq D(A)$, perchè

$$\int_{(0,1)} \alpha(x)|u''(x)|^2\, dx \le \int_{(0,1)} \alpha(x)^{-1}\, dx\, \|\alpha u''\|^2_{C_0([0,1])}.$$

D'altra parte, prendendo $q=2(2-p)^{-1}$, la condizione (2.1) implica che ogni $u\in D(A)$ soddisfa

$$\begin{aligned}\int_{(0,1)} |u''(x)|^p\, dx &= \int_{(0,1)} \alpha(x)^{-p/2}(\alpha(x)|u''(x)|^2)^{p/2}\, dx\\ &\le \Big(\int_{(0,1)} \alpha(x)^{-pq/2}\, dx\Big)^{1/q}\Big(\int_{(0,1)} \alpha(x)|u''(x)|^2\, dx\Big)^{p/2}\\ &\le C\Big(\int_{(0,1)} \alpha(x)|u''(x)|^2\, dx\Big)^{p/2},\end{aligned}$$

cosicchè

$$\|u''\|_{L^p(0,1)} \le C_1\Big(\int_{(0,1)} \alpha(x)|u''(x)|^2\, dx\Big)^{1/2}, \tag{2.2}$$

dove C_1 è una costante positiva.
La (2.2), unita al Teorema 1.2, ci dice che per ogni $f\in L^2_{1/\alpha}(0,1)$ e ogni numero complesso z con $\operatorname{Re} z + |\operatorname{Im} z| \ge \varepsilon_0 > 0$, la soluzione dell'equazione

$$zu - Au = f \tag{2.3}$$

ha in effetti la regolarità $u\in W^{2,p}(0,1)$, dove $p\ (=\frac{2s}{s+1})$ appartiene a $(1,2)$.

Inoltre, il Teorema di immersione di Sobolev (e qui di nuovo si usa sostanzialmente il fatto che lavoriamo in dimensione 1), assicura che $u \in C^1([0,1])$.
Si noti che ciò potrebbe essere dedotto direttamente da $u \in D(A)$. Infatti, se $x, y \in (0,1)$, allora

$$u'(x)-u'(y) = \int_y^x \alpha(t)^{-1/2}\, \alpha(t)^{1/2}\, u''(t)\, dt$$

e così

$$|u'(x)-u'(y)| \le \left| \int_y^x \alpha(t)^{-1}\, dt \right|^{1/2} \left| \int_y^x \alpha(t)\, |u''(t)|^2\, dt \right|^{1/2}$$

$$\le C \left| \int_y^x \alpha(t)^{-s}\, dt \right|^{1/2} \left(\int_0^1 \alpha(t)\, |u''(t)|^2\, dt \right)^{1/2}.$$

Moltiplicando entrambi i membri della (2.3) per $-\bar{u}''(x)$ ed integrando quanto ottenuto su $(0,1)$, si ha

$$z \int_{(0,1)} |u'(x)|^2\, dx + \int_{(0,1)} \alpha(x)|u''(x)|^2\, dx = - \int_{(0,1)} f(x)\bar{u}''(x)\, dx. \tag{2.4}$$

Prendendo la parte reale e la parte immaginaria di (2.4), si ha

$$\mathrm{Re}\, z\, \|u'\|^2_{L^2} + \|\alpha^{1/2}u''\|^2_{L^2} = -\,\mathrm{Re} \int_{(0,1)} f(x)\bar{u}''(x)\, dx,$$

$$|\mathrm{Im}\, z|\, \|u'\|^2_{L^2} = \left| \mathrm{Im} \int_{(0,1)} f(x)\bar{u}''(x)\, dx \right|,$$

cosicchè

$$(\mathrm{Re}\, z + |\mathrm{Im}\, z|)\, \|u'\|^2_{L^2} + \|\alpha^{1/2}u''\|^2_{L^2} \le 2\, \|f\|_{L^2_{1/\alpha}}\, \|\alpha^{1/2}u''\|_{L^2}.$$

Poichè $\mathrm{Re}\, z + |\mathrm{Im}\, z| \ge \varepsilon_0 > 0$, deduciamo che

$$\|\alpha^{1/2}u''\|_{L^2} \le 2\, \|f\|_{L^2_{1/\alpha}},$$

$$|\mathrm{Re}\, z|\, \|u'\|^2_{L^2} = \left| -\int_{(0,1)} \alpha(x)|u''(x)|^2\, dx - \mathrm{Re} \int_{(0,1)} f(x)\bar{u}''(x)\, dx \right|$$

$$\le C\, \|f\|_{L^2_{1/\alpha}}.$$

Segue che esiste $k > 0$ tale che

$$k(1+|z|)\|u'\|^2_{L^2} \le \|f\|_{L^2_{1/\alpha}}. \tag{2.5}$$

Utilizzando la disuguaglianza di Poincaré e il teorema di immersione di Sobolev si conclude da (2.5) che

$$C(1+|z|)\, \|u\|^2_{C_0([0,1])} \le \|f\|^2_{L^2},\ f \in L^2_{1/\alpha}(0,1). \tag{2.6}$$

Poichè, in base alla (4),

$$\int_{(0,1)} \alpha(x)^{-1}|f(x)|^2\, dx \le k'\, \|f\|^2_{C_0([0,1])},\ f \in C_0([0,1]),$$

la (2.6) implica che per ogni $f \in C_0([0,1])$ si ha

$$C(1+|z|)\, \|u\|^2_{C_0([0,1])} \leq \|f\|^2_{C_0([0,1])}.$$

Non resta altro che osservare che se u è la soluzione di (2.3), garantita dal Teorema 1.2 per ogni $f \in L^2_{1/\alpha}(0,1)$, essa coincide con la soluzione di

$$zu - Bu = f,$$

quando $f \in C_0([0,1])$.

Abbiamo pertanto provato che l'operatore B soddisfa la stima risolvente

$$\|(z-B)^{-1}f\|^2_{C_0([0,1])} \leq K(1+|z|)^{-1}\, \|f\|^2_{C_0([0,1])}$$

per ogni $f \in C_0([0,1])$ e ogni z nel settore Σ: $\mathrm{Re}\, z + |\mathrm{Im}\, z| \geq \varepsilon_0$.

In base al lavoro di Favini e Yagi [6], si ha

Teorema 2.1 *Sia* $\alpha \in C([0,1])$, $\alpha(0) = 0 = \alpha(1)$, $\alpha(x)$ *su* $(0,1)$, *e*

$$\int_{(0,1)} \alpha(x)^{-s} dx < \infty$$

per un $s > 1$.

Allora B *genera un semigruppo infinitamente differenziabile in* $C_0([0,1]) = X$ *e*

$$\|e^{tB}\|_{L(X)} \leq Kt^{-1/2} e^{\delta t}, \ \forall\, t > 0,$$

dove $K > 0$ *e* $\delta \in R$.

Qui L(X) denota lo spazio di Banach degli operatori lineari limitati da X in se stesso.

Il nostro ultimo risultato stabilisce che sotto le ipotesi (1.1) e (4) l'operatore W genera un semigruppo infinitamente differenziabile in C([0,1]).

Si ha

Teorema 2.2 *Se* $\alpha(x)$ *soddisfa* (1.1) *e* (4), *allora* W *genera un semigruppo infinitamente differenziabile in* $C([0,1]) = X$ *e*

$$\|(z-W)^{-1}\|_{L(X)} \leq K(1+|z|)^{-1}$$

per ogni z*nel settore* Σ: $\mathrm{Re}\, z + |\mathrm{Im}\, z| \geq \varepsilon_0$, $|z|$ *grande.*

Dimostrazione. Data $g \in C([0,1]) = X$, introduciamo

$$h(x) = g(x) - (1-x)g(0) - xg(1), \ 0 \leq x \leq 1,$$

cosicchè $h \in C_0([0,1])$.

Allora in base al Teorema 2.1, per ogni $z \in \Sigma$, $|z|$ grande il problema

(2.7) $$zv - \alpha v'' = h$$

ha una unica soluzione $v \in D(B)$, con

$$\|v\|^2_{C_0([0,1])} \leq K(1+|z|)^{-1/2}\, \|h\|^2_{C_0([0,1])}.$$

D'altra parte (2.7) si scrive equivalentemente

$$z\left(v+\frac{(1-x)g(0)+xg(1)}{z}\right) - \alpha\left(v+\frac{(1-x)g(0)+xg(1)}{z}\right) = g(x).$$

Perciò, posto $u(x) = v(x) + z^{-1}\left((1-x)g(0)+xg(1) \right)$, allora $u \in D(W)$ e

$$\|u\|_X \le C_1 (1+|z|)^{-1/2} \|h\|_{C_0([0,1])} + C_2|z|^{-1} \|g\|_X$$
$$\le C_3 (1+|z|)^{-1/2} \|g\|_X.$$

Ciò completa la prova.#

Bibliografia

[1] F.Altomare, M.Campiti, "Korovkin-type approximation theory and its applications", W.de Gruyter, 1994.

[2] V.Barbu, A.Favini, *On some degenerate parabolic problems,* in corso di stampa su "Ricerche di Matematica".

[3] V.Barbu, A.Favini, S.Romanelli, *Degenerate evolution equations and regularity of their associated semigroups,* in corso di stampa su "Funkc. Ekv.".

[4] H.Brezis, W.A.Strauss, *Semilinear second order elliptic equations in* L^1, J.Math.Soc.Japan 25(1973), 565-590.

[5] Ph.Clément, C.A.Timmermans, *On* C_0*-semigroups generated by differential operators satisfying Ventcel's boundary conditions,* Indag.Math. 89(1986), 379-387.

[6] A.Favini, A.Yagi, *Multivalued linear operators and degenerate evolution equations,* Ann.Mat.Pura Appl. 163(1993), 353-384.

[7] A.Favini, AYagi, "Degenerate differential equations in Banach spaces", Monografia in preparazione.

[8] G.Fichera, *On a degenerate evolution problem,* in "Partial differential equations with real analysis", H.Begeher, A.Jeffrey, eds., Pitman Research Notes in Math.Series 263, Longman, 1992, 15-42.

[9] A.D.Ventcel, *On boundary conditions for multidimensional diffusion processes,* Theory of probability and its applications 4(1959), 164-177.